Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Sommersemester 2020

**Topologie**
Blatt 10
**Letztes Blatt!**
Abgabe: 29.07.2020, 11Uhr

**Aufgabe 1** (3 Punkte).

Wenn die Identitätsabbildung in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ homotopieäquivalent (siehe Aufgabe 3 im Blatt 9) zu einer konstanten Abbildung $x \mapsto x_0$ ist, zeige, dass $X$ wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 2** (5 Punkte).

Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume und Punkte $x_0$ in $X$ und $y_0 = f(x_0)$ in $Y$ sei $f_\star : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ der von $f$ induzierte Gruppenhomomorphismus.

a) Wenn $f$ injektiv ist, muss $f_\star$ injektiv sein?

b) Wenn $f$ surjektiv ist, ist $f_\star$ surjektiv?

**Hinweis:** Welche Fundamentalgruppen kennen wir?

**Aufgabe 3** (6 Punkte).

Auf der Menge $X = \{1, 2\}$ betrachte folgende Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$.

a) Ist $X$ wegzusammenhängend?

b) Ist $X$ einfach zusammenhängend?

**Hinweis:** Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.

c) Zeige, dass die Konstantenabbildung $x \mapsto 2$ homotopieäquivalent zu der Identitätsabbildung $\mathrm{Id}_X$ ist.

**Aufgabe 4** (6 Punkte).

a) Gegeben eine nicht-leeren Teilmenge $A$ des metrischen Raumes $(X, \mathrm{d})$, zeige, dass die Abstandsfunktion $\begin{array}{rccc} \mathrm{dist}(\cdot, A) : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \inf\limits_{y \in A} \mathrm{d}(x, y) \end{array}$ wohldefiniert und stetig ist.

Wenn $\mathrm{dist}(x, A) = 0$, was bedeutet es für $x$ bezüglich $A$?

b) Schließe aus dem Satz von Borsuk-Ulam, dass für jede Überdeckung $\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ in drei nicht-leere abgeschlossene Teilmengen eine der Teilmengen $A_i$ ein antipodales Paar $(x, -x)$ enthält.

**BONUS!** c) Für jede Überdeckung $\mathbb{S}^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ in drei nicht-leere offene Teilmengen enthält eine der Mengen $U_i$ ein antipodales Paar.

**Hinweis:** Kompakte Räume sind lokal kompakt.

---

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.